

26. Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Ex. et appl.

Plan:

I. Les différents modes de cv

a) La convergence presque sûre [APP]

- rmq sur cvo et notion trap forte + def cv p.o + $X_n + Y_n \xrightarrow{p.o} 2X + Y$ p. 335-336 [APP]
- $g(X_n) \xrightarrow{p.o} g(X)$ g continue p. 333 [APP]
- def $\{X_n \text{ i.i.d.}\}$ + Borel-Cantelli p. 149 + p. 149 [APP]
- caract cv. p.o + critère : $\sum P(|X_n - X| > \epsilon) < \infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{p.o} X + E(X_n - X) < \infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{p.o} X$ p. 336-337 [APP]

b) La convergence en probabilité [APP]

- def cv en proba + $\alpha X_n + Y_n \xrightarrow{p} \alpha X + Y$ + rappel Markov et BT + rmq utilité Markov et BT pour montrer cv en proba + ex. + caract. pour l'espérance + ex de fct qui convergent + corol qui suit + thm g continue alors $g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$ [CAHUS] + p.o $\Rightarrow$ proba + proba $\Rightarrow$ 3 sous suite pour p.o + rmq si $X_n \xrightarrow{p.o} X$ et $X_n \xrightarrow{p.o} Y \Rightarrow X = Y$ p.o + ex cv en proba mais pas p.o. + distance sur L^0 et (L^0, d) complet p. 338-339 [APP]

c) Convergences en moyenne et dans L^p [APP]

- def cv en moyenne + rmq $E(X_n) \rightarrow E(X)$ + def cv dans $L^p + L^1 \Rightarrow$ proba + $L^p \Rightarrow L^1$ pour $p \geq 1 + X_n \xrightarrow{p} X$ et X_n bornée dans $L^q \Rightarrow (X_n)$ cv dans L^p $1 \leq p < q$ p. 332 [APP]

d) La convergence en loi [APP] [CAHUS] [QUES]

- def cv en loi + rmq pour b à support compact p. 37 [CAHUS]
- Levy p. 544 [QUES] DEVL A + 2nd point de thm de Levy p. 544 [QUES]
- caract cv en loi par fonction de répartition DEVL A p. 58 [CAHUS]
- rmq $\alpha X_n + Y \xrightarrow{p} \alpha X + Y$ positif de temps + donner c - ex + $g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$ + cv proba $\Rightarrow$ cv en loi + cv en loi des v.a. dérivée p. 334-337 [APP] + appli binomiale poisson p. 137 [APP] DEVL B
- rmq marche qui a dérivée + cv en loi et fct génératrice p. 338 [APP]
- densité $f_n \xrightarrow{p} f \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X + X_n \xrightarrow{p} a \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} a$ + blabla avant Slutsky + Slutsky [CAHUS] p. 339 - 402 [APP]
- faire annexe avec le lien de toutes les cv p. 409 [APP]

II. Théorèmes limites

a) Loi des grands nombres [APP] [CAHUS]

- loi faible + loi forte [CAHUS] p. 519-525 [APP]
- $\bar{X}_n$ et S_n^2 estimateurs de m et σ en stat p. 173 [CAHUS]

b) Théorème central limite [QUES]

- comme pour montrer TCL + TCL p. 513 [QUES] DEVL B
- construction intervalles de confiance p. 180 [CAHUS]

Références:

- [APP]: Appel, probas pour non probabilistes
- [CAHUS]: Chateaufort, probas stat ex.
- [QUES]: Queffelec, Analyse pour Physique.

Commentaires:

- Bien faire l'annexe
- se servir du blabla de [APP] pour présentation